

- (н) На чертеже ниже изображена окружность с центром O и радиусом R .

Через точки A и E , лежащие на этой окружности, провели две касательные, перпендикулярные друг другу.

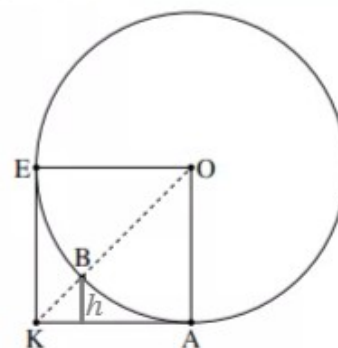
Эти касательные пересекаются в точке K .

Отрезок KO пересекает окружность в точке B .

- (1) Найдите, во сколько раз площадь треугольника AOB больше площади треугольника AKB .

Дано, что площадь треугольника AOB равна 16.

- (2) Найдите длину высоты к стороне AK в треугольнике AKB .



решение :

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AKB}} = \frac{|OB|}{|KB|} = \frac{|OB|}{|KO| - |OB|} = \frac{R}{R\sqrt{2} - R} = \sqrt{2} + 1$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin 45^\circ = \frac{1}{2} R^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 16 \Rightarrow R^2 = 32\sqrt{2} \Rightarrow R = 4\sqrt[4]{8}$$

$$\frac{h}{AO} = \frac{KB}{KO} = \frac{KO - BO}{KO} = \frac{\sqrt{2}R - R}{\sqrt{2}R} \Rightarrow h = R \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt[4]{8} \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt[4]{2}(\sqrt{2} - 1)$$

$$h \approx 1.97$$

- (а) На шахматном турнире два игрока – Яир и Надав – соревнуются друг с другом.

Каждая игра может закончиться с одним из 3 следующих результатов: победа Яира, победа Надава или ничья.

В каждой игре вероятность того, что победит Яир, постоянна и в 2 раза больше вероятности того, что победит Надав.

Обозначим через p вероятность того, что Надав победит в одной игре.

Яир и Надав играют две игры.

- (1) Выразите при помощи p вероятность того, что один из игроков победит в обеих играх.

Известно, что если ни один из игроков не победил в обеих играх, то вероятность того, что каждая из игр закончилась вничью, равна $\frac{9}{31}$.

- (2) Определите, какой из представленных ниже вариантов I–III соответствует значению p . Обоснуйте свой ответ.

I. $\frac{1}{10}$ II. $\frac{11}{27}$ III. $\frac{1}{6}$

решение :

$$1) P_1 = p^2 + (2p)^2 \Rightarrow P_1 = 5p^2$$

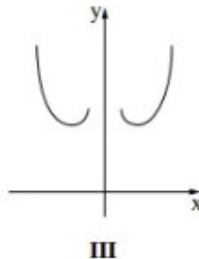
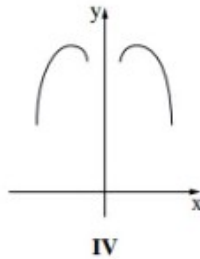
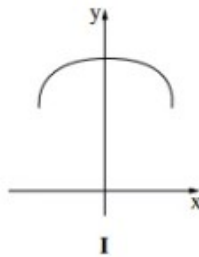
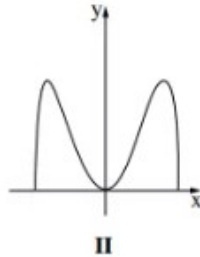
$$2) P_2 = \frac{1 - p - 2p}{1 - p^2 - (2p)^2} = \frac{1 - 3p}{1 - 5p^2} = \frac{9}{31}, p \neq \frac{1}{10}, 1 - 3p > 0 \Rightarrow p \neq \frac{11}{27} \Rightarrow p = \frac{1}{6}$$

(а) Дана функция: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 2\sqrt{16 - x^2}$.

(1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Один из графиков I-IV, представленных ниже, соответствует функции $f(x)$.

Определите, какой из них, и обоснуйте свой ответ.



решение :

1) $x \in [-4, -1] \cup [1, 4]$

2) $x \neq 0, f(\pm 1) = 2\sqrt{15} > f(\pm 4) = \sqrt{15} \Rightarrow$ график **IV**

(т) Дана бесконечная прогрессия, члены которой определены как $a_n = \frac{\cos(\pi \cdot 2^n)}{5 \cdot 2^n}$ для любого натурального n .

(1) Найдите первые три члена прогрессии a_n .

(2) Докажите, что прогрессия a_n – геометрическая прогрессия, и найдите ее знаменатель.

(3) Найдите сумму прогрессии a_n .

решение :

1) $a_1 = \frac{1}{10}, a_2 = \frac{1}{20}, a_3 = \frac{1}{40}$

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5 \cdot 2^n}{5 \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} = \text{const} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

3) $S = \frac{1}{10} * \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S = \frac{1}{5}$

2. a_n – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма членов которой сходится [сходится].

q – знаменатель этой прогрессии.

Обозначим через T сумму членов этой прогрессии с нечетными номерами,

и обозначим через R сумму членов этой прогрессии с четными номерами.

Дано: $\frac{T^2}{R^2} = 16$.

(к) Найдите значение q .

Дана прогрессия b_n , члены которой определены как $b_n = \frac{1+q}{a_n \cdot a_{n+1}}$ для любого натурального n .

Дано: $b_1 = 1$.

(з) Найдите значение a_1 .

(з) Выразите b_n при помощи n .

(т) Докажите методом индукции или любым другим методом, что для любого натурального n выполняется: $b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{16^n - 1}{15}$.

решение :

$$\text{к} \quad T = \frac{a_1}{1-q^2}, R = \frac{a_1 q}{1-q^2} \Rightarrow \frac{T^2}{R^2} = \left(\frac{1}{q}\right)^2 = 16 \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{4}}$$

$$\text{з} \quad b_1 = \frac{1+q}{a_1 \cdot a_2 \cdot q} = 1 \Rightarrow \frac{5}{a_1^2} = 1 \Rightarrow a_1 = \pm\sqrt{5}, \text{ дано } a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_1 > 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = \sqrt{5}}$$

$$\text{з} \quad b_n = \frac{1+q}{a_n \cdot a_{n+1} \cdot q} = \frac{\frac{1}{q} + 1}{a_1^2 q^{2n-2}} = \frac{5}{5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}} = 4^{2n-2} \Rightarrow \boxed{b_n = 4^{2n-2}}$$

$$\text{т} \quad b_n = 4^{2n-2} \Rightarrow b_1 = 1 = \frac{16-1}{15}$$

Пусть $b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{16^n - 1}{15}$, докажем $b_1 + b_2 + \dots + b_n + b_{n+1} = \frac{16^{n+1} - 1}{15}$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + b_{n+1} = \frac{16^n - 1}{15} + 4^{2n} = \frac{16^n - 1 + 15 \cdot 4^{2n}}{15} = \frac{4^{2n} \cdot 16 - 1}{15} = \frac{16^{n+1} - 1}{15}$$

3. В одной большой городской школе в параллели $\kappa^{\text{в}}$ часть учеников – вожатые в молодежном движении, а остальные вожатыми не являются.

В этой параллели часть учеников имеют водительские права, а у остальных водительских прав нет.

Половина учеников, имеющих водительские права, – вожатые в молодежном движении.

Процент учеников-вожатых среди учеников, имеющих права, равен проценту учеников без водительских прав среди учеников-вожатых.

Случайным образом выбирают ученика из этой параллели.

Вероятность того, что выбранный ученик – вожатый или что у него есть права, равна 0.45 .

(к) Найдите, сколько процентов учеников этой параллели – вожатые.

(а) Случайным образом выбирают ученика из числа учеников без водительских прав.

Какова вероятность того, что этот ученик – вожатый?

Случайным образом выбирают 5 учеников из числа тех, у кого нет водительских прав.

(а) (1) Какова вероятность того, что было выбрано более одного вожатого?

(2) Известно, что было выбрано более одного вожатого. Какова вероятность, что число выбранных вожатых – четное?

решение :

Обозначим : вожатые – B , остальные – $\bar{B}$, есть права – A , нет прав – $\bar{A}$

	$\bar{A}$	A	
x	$0.5x$	$0.5x$	B
$1-x$	$1-1.5x$	$0.5x$	$\bar{B}$
1	$1-x$	x	

$$\text{к} \quad 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 0.45 \Rightarrow 1 - (1 - 1.5x) = 0.45 \Rightarrow x = 0.3$$

$$P(B) = 0.3 \Rightarrow \boxed{30\%}$$

$$\text{а} \quad P(B | \bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{0.15}{0.7} = \frac{3}{14} \Rightarrow \boxed{P(B | \bar{A}) = \frac{3}{14}}$$

	$\bar{A}$	A	
0.3	0.15	0.15	B
0.7	0.55	0.15	$\bar{B}$
1	0.7	0.3	

$$\text{а 1)} \quad 1 - P(\bar{B} | \bar{A})^5 - C_5^1 P^4(\bar{B} | \bar{A}) P(B | \bar{A}) = 1 - \left(\frac{11}{14}\right)^5 - 5 \left(\frac{11}{14}\right)^4 \left(\frac{3}{14}\right) = \boxed{0.29}$$

$$\text{а 2)} \quad \frac{C_5^2 P^3(\bar{B} | \bar{A}) P^2(B | \bar{A}) + C_5^4 P^1(\bar{B} | \bar{A}) P^4(B | \bar{A})}{1 - C_5^0 P^5(\bar{B} | \bar{A}) - C_5^1 P^4(\bar{B} | \bar{A}) P(B | \bar{A})} = \frac{10 \left(\frac{11}{14}\right)^3 \left(\frac{3}{14}\right)^2 + 5 \left(\frac{11}{14}\right) \left(\frac{3}{14}\right)^4}{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^5 - 5 \left(\frac{11}{14}\right)^4 \left(\frac{3}{14}\right)} = \boxed{0.79}$$

4. На чертеже ниже изображен тупоугольный треугольник ABC , вписанный в окружность.

Точка K – такая точка на продолжении стороны AB ,
что $AB = BK$.

Продолжение отрезка KC пересекает эту окружность
в дополнительной точке, точке F .

Дано: $\angle BAC = \angle BCA$.

(**н**) Докажите, что AF – диаметр окружности.

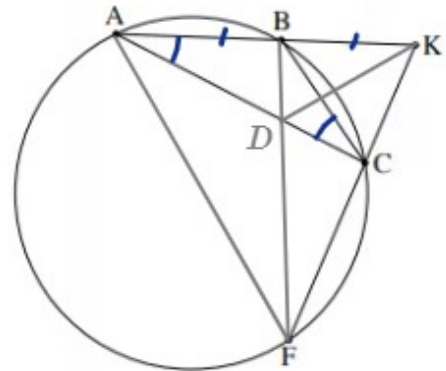
Хорды BF и AC пересекаются в точке D .

(**а**) Докажите, что треугольник ADK – равнобедренный.

(**а**) (1) Докажите, что четырехугольник $BDCK$ можно вписать в окружность.

(2) Докажите, что $\angle DKC = \angle FAC$.

(**г**) Докажите, что $AC \cdot AD = KC \cdot AF$.



решение :

$$\text{н} \quad \angle BAC = \angle BCA \Rightarrow |AB| = |BC|, |AB| = |BK| \Rightarrow \angle ACK = 90^\circ = \angle ACF \Rightarrow$$

AF – диаметр $\Rightarrow$

$$\text{а} \quad |AB| = |BK|, \angle ABF = 90^\circ = \angle KBF \Rightarrow \triangle ABD = \triangle KBD \Rightarrow |AD| = |KD|$$

$$\text{а 1)} \quad \angle KBF = \angle ACK = 90^\circ \Rightarrow \angle DBK + \angle DCK = 180^\circ, DK - \text{диаметр}$$

$$\text{а 2)} \quad \triangle ABD = \triangle KBD \Rightarrow \angle KDB = \angle DAB, CK \perp AC \Rightarrow \angle DKC = 90^\circ - 2 \angle DAB$$

$$\angle AFB = \angle ACB = \angle BAD, \angle ABF = 90^\circ \Rightarrow \angle FAC = 90^\circ - 2 \angle BAD \Rightarrow$$

$$\angle DKC = \angle FAC$$

$$\text{г} \quad \angle ACF = \angle ACK = 90^\circ, \angle DKC = \angle FAC \Rightarrow \triangle ACF \sim \triangle KCD, |KD| = |AD| \Rightarrow$$

$$\frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|KC|}{|KD|} = \frac{|KC|}{|AD|} \Rightarrow \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|KC|}{|AD|}$$

5. На чертеже ниже изображен дельтоид [חלולית] ABCD ($AB = AD$, $CB = CD$).

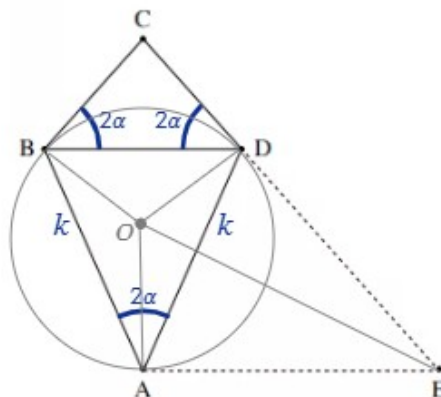
Дано: $\angle BAD = \angle CDB = 2\alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

Обозначим: $AB = k$.

- (а) Выразите при помощи k и α радиус окружности, описанной вокруг треугольника CDB .

Известно, что радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABD , в $\frac{4}{3}$ раза больше радиуса окружности, описанной вокруг треугольника CDB .

- (б) Найдите величину угла BAD .



Точка O – центр окружности, описанной вокруг треугольника ABD .

Через точку A провели прямую, параллельную BD и пересекающую продолжение стороны CD в точке E .

Известно, что площадь треугольника AOE равна 70 .

- (в) Найдите значение k .

решение :

$$\star 2R_{CDB} = \frac{BD}{\sin(\pi - 4\alpha)}, \frac{BD}{\sin 2\alpha} = \frac{k}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \Rightarrow 2R_{CDB} = \frac{k * \sin 2\alpha}{\sin(\pi - 4\alpha) * \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

$$2R_{CDB} = \frac{k * \sin 2\alpha}{\sin(4\alpha) * \cos(\alpha)} = \frac{2k * \sin \alpha}{\sin(4\alpha)} \Rightarrow R_{CDB} = \frac{k * \sin \alpha}{\sin(4\alpha)} = \frac{k}{4\cos(2\alpha) * \cos(\alpha)}$$

$$\star R_{ABD} = \frac{4}{3} * \frac{k}{4\cos(2\alpha) * \cos(\alpha)}, 2R_{ABD} = \frac{k}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{k}{\cos(\alpha)} \Rightarrow$$

$$\frac{k}{3\cos(2\alpha) * \cos(\alpha)} = \frac{k}{2\cos(\alpha)} \Rightarrow \cos(2\alpha) = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\alpha = 48,19^\circ \Rightarrow \angle BAD = 48,19^\circ$$

$$\star \angle BDA = \angle EAD = 90 - \alpha \Rightarrow \angle EDA = 180 - 2\alpha - (90 - \alpha) = 90 - \alpha \Rightarrow$$

$$\angle EAD = \angle EDA \Rightarrow EA = ED, OA = OD = R_{ABD} \Rightarrow \triangle AOE = \triangle DOE \Rightarrow$$

$$\angle AEO = \angle DEO = \alpha,$$

$$AB = AD \Rightarrow \angle AOD = \angle AOB \Rightarrow \angle BAO = \angle DAO = \alpha$$

$$\angle OAE = \alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{R_{ABD}}{AE}$$

$$S_{AOE} = \frac{R_{ABD} * AE}{2} = \frac{R_{ABD}^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow 70 = \frac{1}{2} * \left(\frac{k}{3\cos(2\alpha) * \cos(\alpha)} \right)^2 \operatorname{ctg} \alpha$$

$$70 = \frac{k^2}{(3\cos 48,19^\circ)^2 \sin 48,19^\circ} \Rightarrow k = 14,45$$

6. Дана функция $f(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - kx}}{x^3}$, k – положительный параметр.

(к) Выразите при помощи k область определения функции $f(x)$.

Дана функция $h(x) = -f(x)$.

Координата x точки пересечения графика функции $f(x)$ с графиком функции $h(x)$ равна 1.6.

(д) Найдите значение k .

Подставьте $k = 8$ в функцию $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (а)–(г).

(а) (1) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

(2) Найдите координаты всех точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(3) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = (f(x))^2$, область определения которой совпадает с областью определения функции $f(x)$.

(г) Начертите схематический график функции $g(x)$.

a – параметр, больший 2.

(н) Значение выражения $\int_a^{a+1} g(x) dx$ равно, больше или меньше значения выражения $\int_a^{a+1} f(x) dx$? Обоснуйте свой ответ.

(и) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$, осью x и прямыми $x = 2$ и $x = 6$.

решение:

$$\text{к} \quad x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{k}{5}, +\infty\right)$$

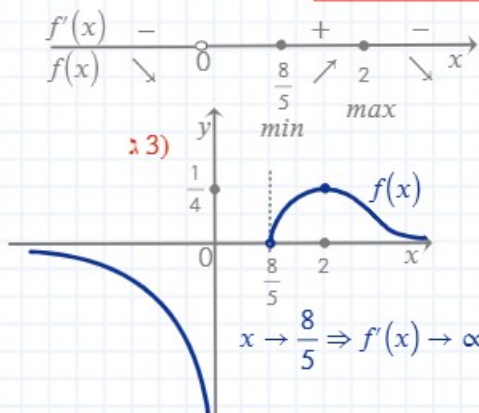
$$\text{д} \quad h(x) = -f(x), \text{ при } x = 1.6 \quad h(x) = f(x) \Rightarrow f(1.6) = 0 \Rightarrow \sqrt{5 \cdot \frac{8}{5} \left(\frac{8}{5} - \frac{k}{5}\right)} = 0 \Rightarrow k = 8$$

а 1) $x \rightarrow 0_- f(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow x = 0$ вертикальная асимптота

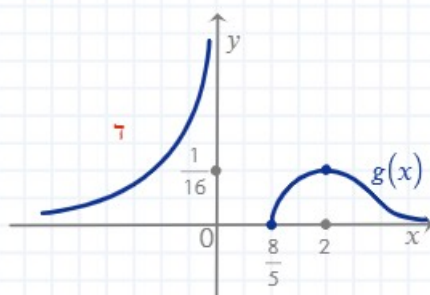
$x \rightarrow +\infty f(x) \rightarrow 0_+, x \rightarrow -\infty f(x) \rightarrow 0_- \Rightarrow y = 0$ горизонтальная асимптота

$$\text{а 2) } f'(x) = \frac{\frac{10x-8}{2\sqrt{5x^2-8x}} \cdot x^3 - 3x^2 \cdot \sqrt{5x^2-8x}}{x^6} = \frac{-10(x-2)}{x^3 \cdot \sqrt{5x^2-8x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \left(2, \frac{1}{4}\right) - \max, \left(\frac{8}{5}, 0\right) - \min$$



$x \rightarrow \frac{8}{5} \Rightarrow f'(x) \rightarrow \infty \Rightarrow x = \frac{8}{5}$ – асимптота



$$\text{н} \quad a > 2, f_{\max}(x) = \frac{1}{4}, \text{ для } a < x < a+1, g(x) = f^2(x) < f(x) < 1 \Rightarrow \int_a^{a+1} g(x) dx < \int_a^{a+1} f(x) dx$$

$$\text{и} \quad S = \int_2^6 g(x) dx = \int_2^6 \frac{5x^2 - 8x}{x^6} dx = \int_2^6 \left(\frac{5}{x^4} - \frac{8}{x^5} \right) dx = \left(-\frac{5}{3x^3} + \frac{8}{4x^4} \right) \Big|_2^6 = \frac{25}{18^2} = 0.077$$

$$S = 0.077$$

7. Дана функция $f(x) = (\sin x)^2 + \cos x - 1$, определенная на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$.

(к) Докажите, что функция $f(x)$ – четная.

(а) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .

(2) Найдите координаты всех точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(а) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \frac{1}{f(x)+b}$, b – параметр.

Известно, что у функции $g(x)$ есть ровно две вертикальные асимптоты.

(т) Напишите два возможных значения b , одно из которых положительное, а другое отрицательное.

Подставьте в функцию $g(x)$ найденное вами отрицательное значение b и ответьте на вопросы пунктов (н)–(и).

(н) (1) Найдите область определения функции $g(x)$.

(2) Найдите координаты всех точек экстремума функции $g(x)$ и определите их тип.

(и) Начертите схематический график функции $g(x)$.

решение :

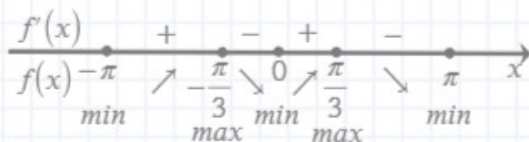
$$\times \quad f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1 = \cos x - \cos^2 x, \quad f(-x) = \cos(-x) - \cos^2(-x) = \cos x - \cos^2 x = f(x)$$

$$\square 1) \quad f(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \text{ или } \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}, \quad x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow$$

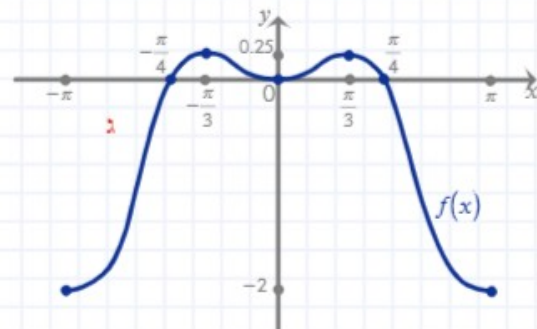
$$x = \pm \frac{\pi}{2}, 0 \Rightarrow \left(\pm \frac{\pi}{2}, 0 \right), (0, 0)$$

$$\square 2) \quad f'(x) = 2\cos x * \sin x - \sin x = 2\sin x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right), \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow$$

$$x = \pm \pi, \pm \frac{\pi}{3}, 0 \Rightarrow$$



$$\left(\pm \pi, -2 \right), (0, 0) - \min, \left(\pm \frac{\pi}{3}, \frac{1}{4} \right) - \max$$

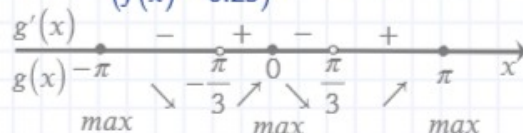


$$\tau \quad f(x) + b = 0 \text{ только в 2х точках} \Rightarrow b \in (0, 2] \cup \{-0.25\} \Rightarrow$$

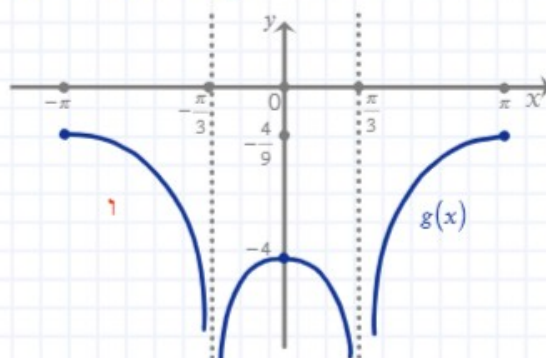
$$b = 1 \text{ и } b = -0.25$$

$$\square 1) \quad f(x) - \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \pi \right]$$

$$\square 2) \quad g'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x) - 0.25)^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \text{ если } f'(x) = 0 \text{ и } f(x) \neq \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \pm \pi, 0 \Rightarrow$$



$$\left(\pm \pi, -\frac{4}{9} \right), (0, -4) - \max$$



8. Дана функция $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 8kx$, определенная для любого x .

k – параметр, отличный от 0.

Точка A – это точка перегиба функции $f(x)$.

(а) Выразите с помощью k координаты точки A .

Известно, что точка A лежит в первом квадранте.

(б) Найдите возможную область значений k .

Через точку A провели перпендикуляр к оси x , пересекающий ее в точке B , и перпендикуляр к оси y , пересекающий ее в точке C .

Дан квадрат I , длина стороны которого равна длине отрезка AB , и квадрат II , длина стороны которого равна длине отрезка AC .

(в) Найдите значение k , для которого сумма площадей квадратов I и II минимальна (в ответе можно оставить знак корня).

решение :

а $f'(x) = 3kx^2 - 6x + 8k, f''(x) = 6kx - 6 \Rightarrow f''(x) = 0$ и меняет знак в точке $A\left(\frac{1}{k}, 8 - \frac{2}{k^2}\right)$

б $\begin{cases} k > 0 \\ 8 - \frac{2}{k^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ (2k-1)(2k+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow k \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

в $S(k) = \frac{1}{k^2} + \left(8 - \frac{2}{k^2}\right)^2, S'(k) = -\frac{2}{k^3} + 2\left(8 - \frac{2}{k^2}\right) * \left(\frac{4}{k^3}\right) = \frac{2}{k^5}(31k^2 - 8) \Rightarrow k = \frac{2\sqrt{62}}{31}$

